L’intégration de méthodes de point intérieur, de concepts de décomposition et d’approches par séparation et évaluation progressive pour résoudre des programmes mixtes en nombres entiers

Samir Elhedhli
Faculté de l’administration, Université McGill
1001, rue Sherbrooke Ouest
Montréal, QC, H3A 1G5

** Résumé de l’article primé présenté au Concours de la meilleure contribution par un étudiant de la SCRO à Québec en mai 2001*

Motivation

La programmation mixte en nombres entiers (MIP) est un outil de modélisation puissant pour la prise de décision dans l’industrie et dans le secteur public. Les nombres entiers sont essentiels pour modéliser une grande variété de situations comportant, entre autres, des restrictions des affectations, des contraintes logiques et des décisions par oui ou par non. Habituellement, les applications réelles se traduisent par des programmes mixtes en nombres entiers de grande taille et donc hors des capacités de résolution des logiciels disponibles. Pour relever le défi que pose la résolution de problèmes de programmation mixte en nombres entiers à grande échelle dans un délai raisonnable, il est impératif d’élaborer des approches de résolution et des concepts algorithmiques nouveaux. Les programmes mixtes en nombres entiers à grande échelle se caractérisent non seulement par leur grande taille, mais aussi par leur structure particulière. Cette structure est attribuable à certaines caractéristiques des modèles: multi-article, multi-période ou multi-échelon. C’est en exploitant judicieusement cette caractéristique qu’on peut réussir à concevoir des méthodes de résolution efficaces.

Le présent texte est tiré de l’article de Elhedhli and Goffin [4] qui présente une nouvelle approche de résolution pour la programmation en nombres entiers à grande échelle. Cette méthode intègre trois types de recherche : les méthodes de point intérieur, les techniques de décomposition et les approches par séparation et évaluation progressive (voir Figure 1). L’intégration de concepts de décomposition classique et de séparation et évaluation progressive conduisent à l’approche par branch-and-price, une méthode qui s’est révélée très efficace pour résoudre des problèmes de programmation en nombres entiers de grande taille. Ce sont les travaux novateurs de Gilmore et Gomory sur le problème de découpe [6] qui a donné lieu à cette approche, développée par la suite dans le contexte de la confection de tournées et horaires par l’équipe Desrosiers-Soumis [3]. Récemment, plusieurs se sont intéressés à cette technique de résolution. Barnhart et coll. [1] donnent un aperçu de cette approche et décrivent les différents modèles et règles de branchement. Vanderbeck et Wolsey [10] ont mis au point une nouvelle règle de branchement qui généralise celles qui existent déjà et qui est facile à utiliser dans le contexte de l’approche *« branch-and-price »*.

La fusion des concepts de décomposition classiques et des méthodes de point intérieur mène àla méthode de coupe au centre analytique (ACCPM) de Goffin et Vial [5]. L’ACCPM est une méthode de coupe où un sous-ensemble de coupes est utilisé et où le reste est généré au besoin. Les techniques de point intérieur sont utilisées pour calculer un point central où sont générés les plans de coupe. On a utilisé cette méthode avec succès pour résoudre un large éventail de problèmes de grande taille.

Habituellement, la plupart des progrès enregistrés dans la programmation en nombres entiers ont suivi de près ceux de la programmation linéaire (PL) puisque les programmes linéaires sont souvent résolus par des méthodes de séparation et évaluation progressive fondées sur la programmation linéaire. À la suite de l'introduction des méthodes de point intérieur, certaines tentatives ont été faites pour remplacer les méthodes du simplexe par des méthodes de point intérieur, approche qu'on désigne sous le nom de séparation et évaluation progressive avec point intérieur (IP B&B). Cette substitution n'a pas donné les résultats escomptés parce qu'il est compliqué de réoptimiser une programmation linéaire à l'aide de méthodes de point intérieur après avoir ajouté des coupes [1].

Dans la foulée du succès obtenu par la méthode ACCPM et le processus *« branch-and-price »* pour résoudre, respectivement, des problèmes d'optimisation non différentiables et de programmation en nombres entiers à grande échelle, et des recherches visant à trouver une méthode qui intègre efficacement les méthodes de point intérieur et de séparation et évaluation progressive, nous proposons de combiner les trois techniques en une méthode de *« branch-and-price »* avec point intérieur (IP B&P).

La méthode IP-B&P pour résoudre des programmes mixtes en nombres entiers de grande taille

Voici comment fonctionne la méthode IP-B&P. On exploite d'abord la structure du problème dans une méthode de décomposition. En second lieu, le problème-maître qui en résulte est résolu à l'aide d'une méthode de coupe et point intérieur. Enfin, ces approches sont intégrées dans un processus de recherche par séparation et évaluation progressive. Pour clarifier ce concept, prenons l'exemple de l'ordonnancement des activités quotidiennes dans un hôpital. Comme il s'agit d'un problème dynamique, nous le **décomposons** par jour et ordonnançons chaque activité quotidienne séparément. On procède à la coordination des différents horaires quotidiens à l'aide de la **méthode de coupe et point intérieur**. Enfin, on utilise **la séparation et évaluation progressive** pour générer des horaires admissibles (optimaux) sur l'ensemble.

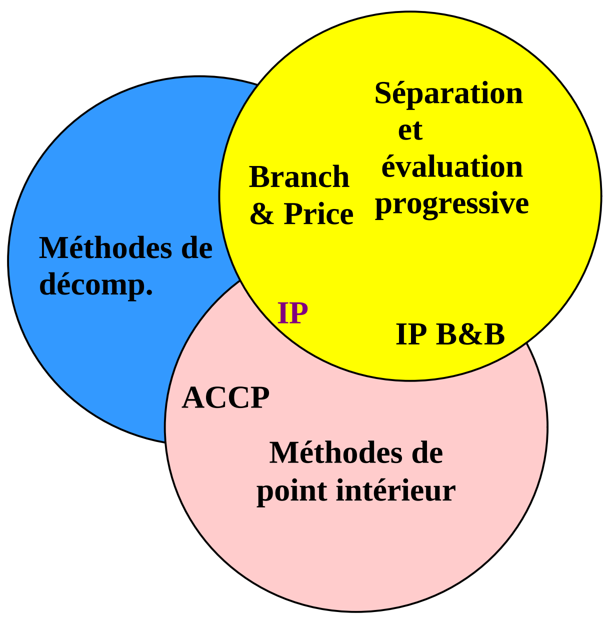

Figure 1 : Intégration de concepts de décomposition, de méthodes de point intérieur et de séparation et évaluation progessive.

On définit généralement le processus *« branch-and-price »* comme une technique où on utilise la génération de colonnes dans un cadre de séparation et évaluation progressive. Par sa dualité, elle est similaire à la séparation et évaluation progressive lagrangienne où le problème dual lagrangien est résolu au moyen de plans de coupe. La formulation du problème dual lagrangien sous la forme d'un programme linéaire fournit le dual du problème-maître entier qu'on solutionne à chaque nœud de l'algorithme de *« branch-and-price »*. La génération de colonnes résout le problème-maître entier primal en commençant par un problème restreint et en ajoutant des colonnes au besoin, tandis que les méthodes de coupe solutionnent le problème-maître entier dual en partant d'un problème relaxé et en y ajoutant des contraintes au besoin.

Dans une séparation et évaluation progressive lagrangienne, la tâche principale consiste à résoudre le problème dual lagrangien qui n'est pas différentiable. Dans la littérature, on observe que la plupart du temps, on utilise l'optimisation de sous-gradient à cette fin. Bien qu'elles soient faciles à mettre en œuvre, les méthodes de sous-gradient ne permettent pas une convergence rapide et elles n'ont pas de critères d'arrêt bien définis [1]. Par ailleurs, on peut résoudre le problème dual lagrangien au moyen d'une méthode de coupe qu'on applique au problème-maître dual. Les coupes sont ajoutées en fonction d'un point de requête provenant du problème-maître relaxé. Le choix du point de requête caractérise différentes méthodes de coupe et, identiquement, différentes variantes de processus de génération de colonnes. Les méthodes classiques de *« branch-and-price »* utilisent un point extrême dual du problème-maître restreint comme point de requête. Par sa dualité, cette approche correspond à la méthode de coupe de Kelley [8] où des coupes sont générées à un point extrême du problème-maître relaxé. On sait que la méthode de Kelley donne lieu à des effets d'amortissement *(« tailing »)* et que la génération de coupes au centre de la région admissible d'un problème-maître relaxé est supérieure. La principale difficulté des stratégies de point central réside dans le calcul de centres d'ensembles convexes. Il est plus difficile, par exemple, de calculer le centre de gravité que d'optimiser le problème d'origine. La méthode de coupe au centre analytique (ACCPM) [5] est conçue pour surmonter cette difficulté en générant des coupes fondées sur le concept de *« centre analytique »* issu des méthodes de point intérieur. Plus précisément, on résout le problème-maître dual entier à l'aide de la méthode ACCPM quand les coupes sont générées au centre analytique d'un sous-ensemble fini de la région admissible duale.

L'approche IP-B&P est essentiellement une méthode de séparation et évaluation progressive s'appuyant sur un processus de borne lagrangienne qu'on calcule à l'aide d'une méthode de coupe de point intérieur. La méthode obtenue est plus qu'une simple combinaison de ces trois différentes techniques. Elle prend en compte et corrige toute complication qui survient à la suite de cette intégration. Cela inclut la relance des méthodes de point intérieur, la règle de branchement et l'exploitation de l'information antérieure. L'article [4] présente la méthode IP-B&P et en explique les différents éléments. Il traite de la borne inférieure lagrangienne, du calcul efficace qu'on peut en faire au moyen de la méthode ACCPM et de l'utilisation de l'information duale de l'ACCPM pour générer des solutions admissibles candidates et orienter la règle de branchement. En outre, on utilise l'information au nœud père, sous forme de coupes, du candidat et de bornes inférieures, pour initialiser la méthode aux nœuds fils et pour relancer naturellement la méthode de coupe et point intérieur. Étant donné que la méthode du simplexe duale utilise le tableau final au nœud père comme base initiale du nœud fils, la méthode de point intérieur duale utilise le centre analytique final au nœud père pour résoudre le nœud fils. L'expérience de calcul démontre clairement l'efficacité de cette stratégie.

Enfin, il est important de noter qu'il existe de nombreux algorithmes de séparation et évaluation progressive qui utilisent un processus de borne lagrangienne et solutionnent le dual lagrangien au moyen d'une optimisation de sous-gradient ou par ascension duale. Seules les approches qui solutionnent le dual lagrangien au moyen d'une méthode de génération de plans de coupe/colonnes peuvent être qualifiées de méthodes *« branch-and-price »*.

D'un autre point de vue, cette étude est une étape importante dans l'utilisation efficace des méthodes de point intérieur dans des approches de séparation et évaluation progressive pour la programmation en nombres entiers. Les tentatives antérieures [7] se sont attachées principalement à résoudre les programmes linéaires au moyen d'une méthode de point intérieur. Notre approche est fondamentalement différente à deux égards. D'une part, nous utilisons une borne lagrangienne plutôt que la borne de programmation linéaire. D'autre part, la méthode de point intérieur est employée dans un contexte de plan de coupe plutôt que comme méthode de résolution directe.

<u>Conclusions et recherches futures</u>

Cette étude a été motivée par un ensemble de facteurs encourageants. D'abord, la borne lagrangienne est au moins aussi bonne que la borne de programmation linéaire et elle a tendance à être plus précise si on utilise une relaxation adéquate. Ensuite, la méthode ACCPM peut fournir une solution optimale éprouvée au problème dual lagrangien dans une configuration de convergence acceptable. Elle ne cherche pas à l'aveuglette comme l'optimisation de sous-gradient et elle ne présente pas d'effets d'amortissement comme la méthode de coupe de Kelley. Enfin, l'information sous la forme de coupes générées, du candidat et de bornes inférieures est exploitée efficacement dans les nœuds subséquents tant par le programme de recherche que par la méthode ACCPM. Quand on ajoute ou on supprime des coupes, le recentrage se fait assez rapidement à l'aide des méthodes de point intérieur primales et duales, respectivement.

Si l'utilisation des méthodes de point intérieur dans un processus de séparation et évaluation progressive en programmation linéaire n'a pas obtenu de succès, c'est en raison de l'incompatibilité entre la borne de programmation linéaire et les méthodes de résolution de point intérieur. Notre étude fait valoir que les méthodes de point intérieur conviennent naturellement pour la séparation et évaluation progressive quand on utilise une borne lagrangienne. Les duaux lagrangiens qui en résultent sont résolus de manière optimale au moyen d'une méthode de coupe et point intérieur.

La méthodologie IP-B&P pousse plus loin la recherche actuelle dans les domaines présentés dans la Figure 1. Elle ouvre aussi d'autres avenues de recherche qui auront un impact positif pour la résolution de problèmes réels de grande taille autrefois inaccessibles.

Pour les recherches futures, une mise en œuvre efficace de l'algorithme IP-B&P exploitant les récents développements en algèbre linéaire numérique et de nombreux essais sur les programmes mixtes en nombres entiers figurant dans la littérature sont les principaux points à l'ordre du jour. Quant à l'algorithme, l'utilisation de stratégies de fixation des variables, de coupes valides et de nouvelles règles de branchement aura possiblement un impact sur son rendement.

Sur le plan des applications, nous comptons utiliser la méthodologie *« branch-and-price »* avec point intérieur comme base pour résoudre certains programmes mixtes en nombres entiers de grande taille, classiques et plus récents. Parmi les problèmes classiques pouvant faire l'objet d'une résolution par cette approche figurent les nombreux problèmes d'ordonnancement, de routage et de transport recensés dans la littérature. Les problèmes récents sont des modèles analytiques qui découlent de l'intégration de décisions liées au stock, à la production et à la distribution dans les secteurs de la logistique et de la gestion de la chaîne d'approvisionnement.